ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΤΜΗΜΑΤΑ ΧΕΙΜΕΡΙΝΗΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ) ΤΗΣ 22-9-24

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 76

Α2. Σχολικό σελ. 74

Α3. Σ,Σ,Λ,Λ,Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_g = R^*$

Παρατηρώ ότι $D_f \neq D_g$, οπότε $f \neq g$.

Θεωρώ σύνολο $\Gamma = D_f \cap D_g = (0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x \in \Gamma$:

$g(x) = 1 - lnx^2 = 1 - 2lnx = f(x)$

Άρα $f(x) = g(x), για\ κάθε\ x \in \Gamma$

Β2. Θεωρώ την συνάρτηση $H(x) = \frac{f(x)}{x^3-1}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Παρατηρώ ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$ και $\lim_{x\to 1}(x^3 - 1) = 0$, οπότε για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$:

$$H(x) = \frac{f(x)}{x^3-1} = \frac{f(x)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{f(x)}{x^2+x+1} \cdot \frac{1}{x-1}\ , \mu\varepsilon$$

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} > 0\ \ και\ \ \lim_{x\to 1}(x-1) = 0.$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

α. Για $x \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$

$$\lim_{x\to 1^-} H(x) = \frac{1}{3} \cdot (-\infty) = -\infty$$

β. Για $x \in (1,+\infty) \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$

$$\lim_{x\to 1^+} H(x) = \frac{1}{3} \cdot (+\infty) = +\infty$$

Επομένως, δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 1} H(x)$.

Β3.

$D_f = (0,+\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2\ln(x_1) + 1 = -2\ln(x_2) + 1 \Rightarrow$$

$$lnx_1 = lnx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 , οπότε αντιστρέφεται.

(Σχόλιο: Μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και με την βοήθεια της μονοτονίας)

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -2lnx + 1 \Leftrightarrow lnx = \frac{1-y}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{2}}, y \in R$$

Πρέπει

$$x \in R \Leftrightarrow e^{\frac{1-y}{2}} \in R, \text{που ισχύει για κάθε } y \in R$$

Επομένως $f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{2}}, x \in R$

Β4. $h(x) = e^{\frac{1-x}{2}},\ x \in R$

$$(h)'(x) = e^{\frac{1-x}{2}} \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)' = -\frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}}, \qquad x \in R$$

$$(h)''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1-x}{2}} \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)' = \frac{1}{4}e^{\frac{1-x}{2}}, \qquad x \in R$$

Επομένως,

$$(h)'(x) + 2(h)''(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{4}e^{\frac{1-x}{2}}$$

$$= 0, \text{για κάθε } x \epsilon R.$$

Β4=5. Για κάθε $x \in (1,2)$ η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{f(x)}{x-1} = 1 - \frac{h(x)}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)f(x) + (x-1)h(x) - (x-1)(x-2) = 0$$

Θεωρώ την συνάρτηση

$$N(x) = (x-2)f(x) + (x-1)h(x) - (x-1)(x-2), x \in [1,2]$$

Η συνάρτηση Ν είναι συνεχής στο [1,2], ως άθροισμα, γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$$N(1) = -f(1) = -1 < 0$$

$$N(2) = h(2) = e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

Άρα $N(1)N(2) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έχει στο διάστημα (1,2) τουλάχιστον μια ρίζα η εξίσωση

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1} = 1 - \frac{h(x)}{x-2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρώ συνάρτηση

$$H(x) = \frac{f(x)-1}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = H(x) \cdot \eta\mu x + 1, \kappa o \nu \tau \acute{\alpha}\ \sigma \tau o\ 0,$$

$$\mu\varepsilon \lim_{x \to 0} H(x) = -1.$$

Οπότε, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (H(x) \cdot \eta\mu x + 1) = (-1) \cdot 0 + 1 = 1.$

Όμως η f είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο $xo = 0$ επομένως, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$

$f(0) = \frac{0^2+\kappa}{e^0} = \kappa, \acute{\alpha}\rho\alpha\ \kappa = 1$, δηλαδή $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}, x \in R.$

Γ2. $f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{e^{2x}} = -\frac{(x-1)^2}{e^x}, \ \ x \in R$

Παρατηρώ ότι $f'(x) \leq 0, για\ κάθε\ x \in R$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$, στο οποίο σημείο η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε και 1-1.

Για κάθε $\alpha, \beta \in R, με\ \alpha < \beta$:

$$\ln\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1} < \beta - \alpha \Leftrightarrow \ln\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1} < lne^{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1} < \frac{e^\beta}{e^\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta^2+1}{e^\beta} < \frac{\alpha^2+1}{e^\alpha} \Leftrightarrow f(\beta) < f(\alpha) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \beta > \alpha, \ \ που\ ισχύει.$$

Γ3.

Για κάθε $x \in R$:

$$x^2 + 1 = 2e^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 1 = \frac{2e^x}{e} + 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{2}{e} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(1) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow} x = 1$$

Γ4.

(α)

Η συνάρτηση g είναι συνεχής, οπότε είναι συνεχής και στο $xo = 0$, άρα $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) \ \ (1)$

Για κάθε $x \neq 0$:

$$|xg(x) - \eta\mu x| \leq x^4\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$-x^4\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq xg(x) - \eta\mu x \leq x^4\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x - x^4\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq xg(x) \leq \eta\mu x + x^4\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

Για κάθε $x > 0$:

$(2) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} - x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \le g(x) \le \frac{\eta\mu x}{x} + x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)$ *(3)*

Όμως

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} - x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 - 0 = 1$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 - 0 = 1$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής στην σχέση (3) έχουμε:

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(0) = 1$

Διότιι, για κάθε $x \neq 0$, έχουμε:

$$\left|x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x^3| \cdot \left|\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x^3| \cdot 1 = |x^3|, \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$\left|x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x^3| \Leftrightarrow -|x^3| \le x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \le |x^3|, (4)\ \ \acute{o}\mu\omega\varsigma$$

$\lim_{x\to 0}|x^3| = 0, \lim_{x\to 0}(-|x^3|) = 0,$ *άρα από κριτήριο παρεμβολής στη σχέση (4) έχουμε:* $\lim_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι στο $(0,1)$ έχει ακριβώς μια ρίζα η εξίσωση:

$$f(x) = \frac{g(0)}{xe^x} \Leftrightarrow xe^x f(x) - g(0) = 0 \Leftrightarrow xe^x\frac{x^2+1}{e^x} - 1$$
$$= 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 1 = 0$$

Θεωρώ συνάρτηση $Q(x) = x^3 + x - 1, x \in [0,1]$

$Q'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in R$, *άρα η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $Q(x) = 0$, έχει το πολύ μια ρίζα.*

Η Q είναι στο $[0,1]$ συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση.

$Q(0) = -1 < 0, Q(1) = 1 > 0, \acute{\alpha}\rho\alpha\ Q(0)Q(1) < 0,$ *οπότε από Θ.Bolzano έχει στο (0,1) τουλάχιστον μια ρίζα η εξίσωση $Q(x) = 0$.*

Επομένως, έχει στο $(0,1)$ ακριβώς μια ρίζα η εξίσωση

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 1 = 0$$

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

$E(x) = 2x\sqrt{16-x^2}$, $x \in (0,4)$.

Δ1. Για $x \in (0,4)$:

$$E'(x) = (2x)'\sqrt{16-x^2} + 2x\left(\sqrt{16-x^2}\right)' = 2\sqrt{16-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{2(\sqrt{16-x^2})^2 - 2x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{2\left(16-2x^2\right)}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{4\left(8-x^2\right)}{\sqrt{16-x^2}}$$

Λύνω :

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x = 2\sqrt{2}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4\left(8-x^2\right)}{\sqrt{16-x^2}} > 0 \overset{\sqrt{16-x^2}>0}{\Longleftrightarrow} 8 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 8 \Leftrightarrow |x| < 2\sqrt{2} \overset{x\in(0,4)}{\Longleftrightarrow} 0 < x < 2\sqrt{2}$$

x	-∞ 0		$2\sqrt{2}$	4
$E'(x)$		+	0	-
E		↗		↘

Για $x = 2\sqrt{2}$, η συνάρτηση Ε παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της που είναι $E\left(2\sqrt{2}\right) = 16$

Δ2. **(α)** $D_f = (0,4)$

Για $x \in (0,1/2) \cup (1/2,4)$:

$$f(x)\cdot\left(E(x) - \sqrt{16-x^2}\right) = \sqrt{16-x^2}\cdot\left(2x^3 - x^2 + 2x - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot\left(2x\sqrt{16-x^2}-\sqrt{16-x^2}\right)=\sqrt{16-x^2}(2x-1)(x^2+1)\Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot(2x-1)\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-x^2}(2x-1)(x^2+1)\overset{\sqrt{16-x^2}(2x-1)\neq 0,\ \forall x\in(0,1/2)\cup(1/2,4)}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x)=x^2+1,x\in(0,1/2)\cup(1/2,4).$$

Η f είναι συνεχής στο (0,4) , άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)=\frac{5}{4}$

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\in(0,1/2)\cup(1/2,4)\\ \frac{5}{4}\ \ ,\ x=\frac{1}{2}\end{cases}=x^2+1, x\in(0,4)$

(β) $E\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)=E(3)$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$\mathrm{K}(x)=4\cdot E(x)-\left(2\cdot E(a)+E(\beta)+E\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)\right)=4\cdot E(x)-\left(2\cdot E(a)+E(\beta)+E(3)\right), x\in[2\sqrt{2},3]$

▹ Η Κ είναι συνεχής στο $[2\sqrt{2},3]$ (πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

$2\sqrt{2}<\alpha<3<4\overset{\mathrm{E}\downarrow(2\sqrt{2},4)}{\Rightarrow}\mathrm{E}(3)<\mathrm{E}(\alpha)<\mathrm{E}(2\sqrt{2})(1)$

▹ $2\sqrt{2}<\beta<3<4\overset{\mathrm{E}\downarrow(2\sqrt{2},4)}{\Rightarrow}\mathrm{E}(3)<\mathrm{E}(\beta)<\mathrm{E}(2\sqrt{2})(2)$

$2\sqrt{2}<3<4\overset{\mathrm{E}\downarrow(2\sqrt{2},4)}{\Rightarrow}\mathrm{E}(3)<\mathrm{E}(2\sqrt{2})\ \ (3)$

$\mathrm{K}\left(2\sqrt{2}\right)=2\left(\mathrm{E}(2\sqrt{2})-\mathrm{E}(\alpha)\right)+\left(\mathrm{E}(2\sqrt{2})-\mathrm{E}(\beta)\right)+\left(\mathrm{E}(2\sqrt{2})-\mathrm{E}(3)\right)>0$

$\mathrm{K}(3)=2\left(\mathrm{E}(3)-\mathrm{E}(\alpha)\right)+\left(\mathrm{E}(3)-\mathrm{E}(\beta)\right)<0$

(από (1),(2).(3))

Άρα $\mathrm{K}\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\mathrm{K}(3)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in\left(2\sqrt{2},3\right)$,

ώστε $\mathrm{K}(x_o)=0$ **(4)**

Για κάθε $x_1,x_2\in\left(2\sqrt{2},3\right)$, με

$$x_1 < x_2 \overset{\mathrm{E}\downarrow(2\sqrt{2},3)}{\Rightarrow} \mathrm{E}(x_2) < \mathrm{E}(x_1) \Rightarrow 4\mathrm{E}(x_2) < 4\mathrm{E}(x_1) \Rightarrow$$

$$4\mathrm{E}(x_2) - \left(2\cdot E(a) + E(\beta) + E(3)\right) < 4\mathrm{E}(x_1) - \left(2\cdot E(a) + E(\beta) + E(3)\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{K}(x_2) < \mathrm{K}(x_1)$$

΄Αρα $\mathrm{K}\downarrow\left(2\sqrt{2},3\right)$ και επομένως η εξίσωση $\mathrm{K}(x)=0$ έχει μία το πολύ ριζα

στο $\left(2\sqrt{2},3\right)$ **(5)**

Από **(4) και (5)** προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in \left(2\sqrt{2},3\right)$,

ώστε $\mathrm{K}(x_o)=0 \Leftrightarrow E(x_o) = \dfrac{2\cdot \mathrm{E}(\alpha) + \mathrm{E}(\beta) + \mathrm{E}\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)}{4}$.

Δ3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2 + (f(x)+1)^2 + \ldots + (f(x)+2023)^2}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)^2 + (x^2+2)^2 + \ldots + (x^2+2024)^2}{x^4+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2(1+\frac{1}{x^2})\right)^2 + \left(x^2(1+\frac{2}{x^2})\right)^2 + \ldots + \left(x^2(1+\frac{2024}{x^2})\right)^2}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left((1+\frac{1}{x^2})^2 + (1+\frac{2}{x^2})^2 + \ldots + (1+\frac{2024}{x^2})^2\right)}{x^4(1+\frac{1}{x^4})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{x^2})^2 + (1+\frac{2}{x^2})^2 + \ldots + (1+\frac{2024}{x^2})^2}{(1+\frac{1}{x^4})} = \frac{1+1+\ldots+1}{1} = 2024$$